محاسبهٔ انتگرال به کمک مساحت

کلیدواژه‌ها: انتگرال، مساحت دایره، تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت

محمد رحمانی *
دبیر ریاضی از تاکستان

برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع خطی می‌توان از تعبیر آن‌ها به‌عنوان مساحت استفاده کرد و جواب انتگرال معین را به‌دست آورد. مثلاً برای محاسبهٔ انتگرال زیر داریم:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

با توجه به حدود انتگرال‌گیری باید $\frac{1}{4}$ مساحت دایره را برای محاسبهٔ این انتگرال معین به‌دست آورد:

$$\frac{1}{4}\pi(2)^2=\pi$$

که شبیه این مثال را در تمرین ۹ صفحهٔ ۲۴۲ کتاب «حساب دیفرانسیل و انتگرال»، چاپ ۱۳۹۱ داریم.

در حالتی که زاویهٔ موردنظر برای محاسبهٔ مساحت قطاع جزء زاویه‌های متعارف مثلثاتی باشد نیز می‌توان این انتگرال را محاسبه کرد که آن‌را با مثال زیر توضیح می‌دهیم:

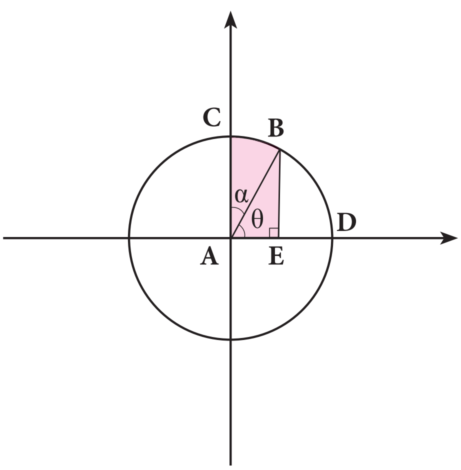
مثال ۱. با تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

برای رسم ناحیهٔ انتگرال‌گیری مثال بالا می‌دانیم که تابع زیر علامت انتگرال به‌صورت زیر است:

$$y=\sqrt{4-x^2} \qquad (1)$$

که با به توان ۲ رساندن تساوی به رابطهٔ $x^2+y^2=4$ می‌رسیم که دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ است. با توجه به رابطهٔ (۱)، y عبارتی مثبت است. پس نیم‌دایرهٔ بالایی برای آن انتخاب می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به حدود تغییرات x ناحیهٔ زیر (هاشورزده) را برای محاسبهٔ مساحت داریم:



شکل ۱

برای محاسبهٔ مساحت قطاع داریم:

$$AE=1,\ \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\angle CAB=\frac{\pi}{6}$$

بنابراین مساحت قطاع (با زاویهٔ $\alpha=\frac{\pi}{6}$) برابر

است با:

$$S_{CAB}=\frac{۱}{۲}r^{۲}\alpha=\frac{۱}{۲}(۲)^{۲}\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

از طرف دیگر، برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABE داریم:

$$BE=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$$

$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}(۱)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

که با جمع مساحت قطاع و مساحت مثلث، مساحت کل و جواب انتگرال را به‌صورت زیر داریم:

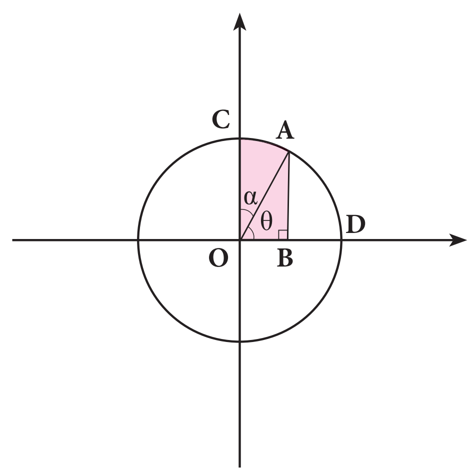
$$\frac{\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

البته این انتگرال را با تغییر متغیر $x=۲\sin\theta$ نیز می‌توان حل کرد. که این تغییر متغیر جزو بحث‌های کتاب دیفرانسیل نیست. اما زمانی‌که زاویهٔ موردنظر برای محاسبهٔ مساحت قطاع جزو زاویه‌های متعارف مثلثاتی نباشد می‌توان این انتگرال را نیز محاسبه کرد که آن‌را با مثال زیر توضیح می‌دهیم:

مثال ۲. با تعبیر انتگرال به‌عنوان مساحت، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{۰}^{۲}\sqrt{۹-x^{۲}}\,dx$$

با رسم ناحیهٔ انتگرال‌گیری، ناحیهٔ هاشورزده را با پاره‌خط AB به یک مثلث و یک قطاع تبدیل می‌کنیم:



شکل ۲

مساحت مثلث OAB عبارت است از:

$$r=۳\Rightarrow OA=۳,\ AB=\sqrt{۳^{۲}-۲^{۲}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB عبارت است از:

$$\frac{\sqrt{۵}\times ۲}{۲}=\sqrt{۵}$$

همچنین برای محاسبهٔ مساحت قطاع OAC داریم:

$$\cos\theta=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\theta=\cos^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

با توجه به شکل، زاویهٔ α برابر است با:

$$\alpha=\frac{\pi}{۲}-\cos^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

از طرف دیگر، بنابه رابطهٔ $\cos^{-۱}\theta+\sin^{-۱}\theta=\frac{\pi}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$\sin^{-۱}\theta=\frac{\pi}{۲}-\cos^{-۱}\theta$$

$$\Rightarrow\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}=\frac{\pi}{۲}-\cos^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

حال با توجه به فرمول محاسبهٔ مساحت قطاع، مساحت تشکیل شده توسط زاویهٔ $\alpha=\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S=\frac{۱}{۲}r^{۲}\alpha=\frac{۱}{۲}\times ۳^{۲}\times\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}=\frac{۹}{۲}\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

بنابراین مساحت کل قسمت هاشورزده (مجموع مساحت مثلث OAB و قطاع OAC) برابر است با:

$$S_{\text{کل}}=\sqrt{۵}+\frac{۹}{۲}\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

و بنابراین:

$$\int_{۰}^{۲}\sqrt{۹-x^{۲}}\,dx=\sqrt{۵}+\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}$$

برای محاسبهٔ انتگرال معین توابع خطی می‌توان از تعبیر آن‌ها به‌عنوان مساحت استفاده کرد و جواب انتگرال معین را به‌دست آورد

* Rahmani2014Hmohammad@gmail.com